# 大気GCMの物理過程
# 積雲のパラメタリゼーション

積雲の効果をパラメータ化する方法は
多数あるが、ここでは代表的な

a. 対流調節
b. Kuo スキーム
c. Arakawa-Schubert スキーム

について説明する。

（積雲パラメタリゼーションは
格子の粗い非静力学大気モデル
の数値実験でも必要となる。）

FIG. 4. Cumulus convection generates stratiform cloudiness through detrainment of ice and liquid. A major portion of all stratiform cloudiness is produced through such detrainment.

Randall et al. (2003, BAMS)

# 準備1：大規模な運動を記述する方程式
# (吉森先生の講義のレイノルズ平均の所を参照)

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla A = B, \qquad A = u, v, w, \theta, q \cdots$$ （任意の物理量）

$$\overline{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{\Delta t \Delta x \Delta y} \iiint A dx' dy' dt',$$ 格子平均量

$$A' = A - \overline{A}$$ 平均からのずれ

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla \overline{A} = B_m + B_e - \nabla \cdot \overline{A' \mathbf{V}'},$$

$B_m$ :　$B$のうち$\overline{A}$に依存する部分

$B_e$ :　残差

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}_H} \cdot \nabla \overline{A} + \overline{w} \frac{\partial \overline{A}}{\partial z} = B_m + B_e \boxed{\phantom{xxxxxxxx}} - \frac{\partial \overline{A' w'}}{\partial z},$$

or

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}_H} \cdot \nabla \overline{A} + \overline{\omega} \frac{\partial \overline{A}}{\partial p} = B_m + B_e \boxed{\phantom{xxxxxxxx}} - \frac{\partial \overline{A' \omega'}}{\partial p}, \qquad \omega = \frac{dp}{dt}$$

$\boxed{\phantom{xx}}$ は通常無視する

# 準備2: 静的エネルギー

- 乾燥静的エネルギー $s \equiv C_p T + gz$
  - 不飽和過程で保存
- 湿潤静的エネルギー $h \equiv C_p T + gz + Lq$
  - 飽和過程で保存

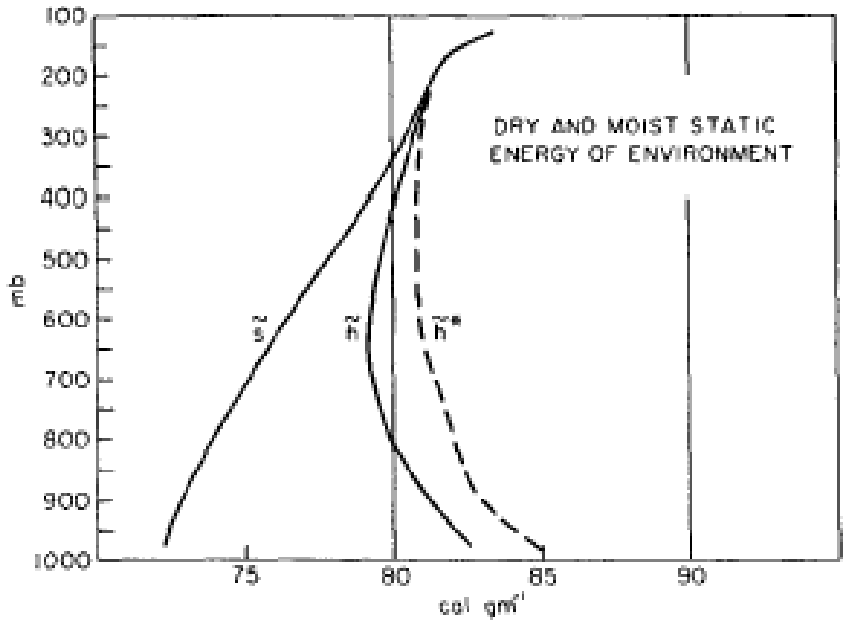



FIG. 9. The mean dry static energy $\bar{s}$, moist static energy $\bar{h}$ (both solid), and saturation moist static energy $\bar{h}^*$ (dashed) of the environment.

Marshall Islands での観測例

Yanai et al (1973, JAS)

# 準備3：積雲による熱、水蒸気の上方輸送

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{s} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{s}}{\partial p} = Q_R + LC - \frac{\partial (\overline{s' \omega'})}{\partial p} \equiv Q_1,$$

$Q_1$ : apparent heat source, $s \equiv C_p T + gz$ : dry static energy

$$L\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{q} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{q}}{\partial p}\right) = -LC - L \frac{\partial (\overline{q' \omega'})}{\partial p} \equiv -Q_2,$$

$Q_2$ : apparent moisture sink

$Q_R$ : 放射による加熱/冷却率
$C$ : 単位時間当りの凝結量

$Q_1, Q_2 \rightarrow$ 観測値から計算可能

$Q_R \rightarrow$（大雑把には）推定可能

$$(Q_1 - Q_R) - Q_2 = -L \frac{\partial (\overline{h' \omega'})}{\partial p}$$

→ 対流による湿潤静的エネルギーの鉛直輸送が計算できる

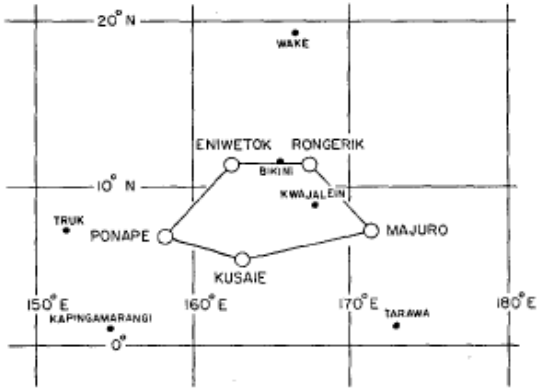



FIG. 5. Island stations in the Marshall Islands region. The pentagon connecting the five stations indicated by large circles was used for the large-scale budget computations.

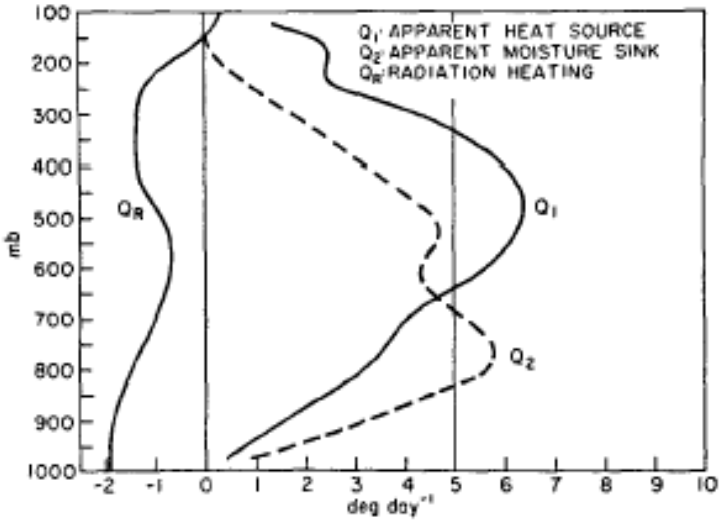



FIG. 10. The mean apparent heat source $Q_1$ (solid) and moisture sink $Q_2$ (dashed). On the left is the radiational heating rate given by Dopplick (1970).

Yanai et al (1973, JAS)

# Cheng and Yanai(1989, JAS) 各量の時間高度断面

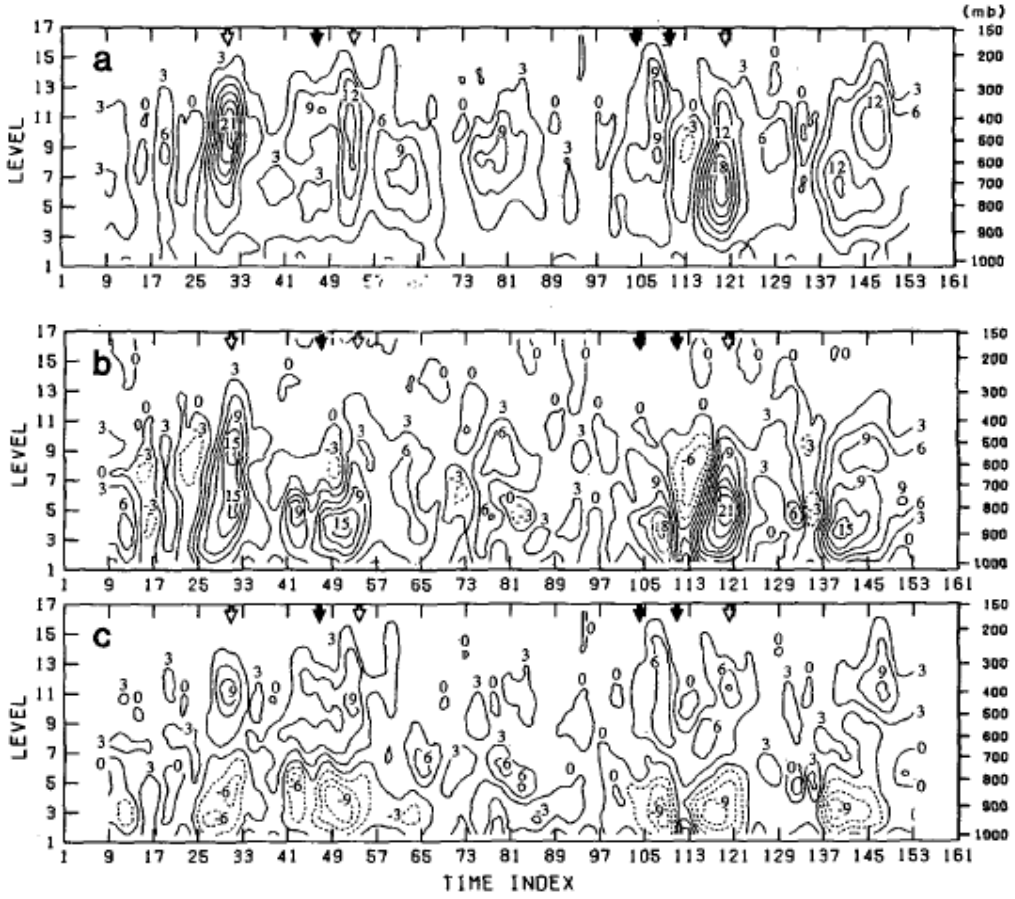



FIG. 1. Time–height sections of the observed (a) $Q_1 - Q_R$, (b) $Q_2$ and (c) $Q_1 - Q_2 - Q_R$, averaged over a 3° × 3° area at the center of the GATE network during a period from time index 9 (0000 UTC 31 August 1974) to time index 153 (0000 UTC 18 September 1974). Units: K day$^{-1}$.

$$Q_1 - Q_R \approx Q_1$$

$Q_2$

$Q_2$のピークは$Q_1$より低高度
→低高度の水蒸気が失われ高高度の大気を加熱していることを表す

$$(Q_1 - Q_R) - Q_2 = -L\frac{\partial(\overline{h'\omega'})}{\partial p}$$

$h$が対流により上方に輸送されていることを示している。

# a. 対流調節

- 高橋(1940): 寒気団の海洋上での変質過程に適用
- Manabe et al. (1965,MWR) : GCMへの最初の適用

→ 大気の成層が不安定になったら対流が起こり、結果として成層は中立状態になるという対流の役割を表現したもの （最も簡単な方式）。

$\gamma = -\dfrac{dT}{dz}$ （気温減率）

$\gamma_d = g / C_p = 9.8\ ^\circ\mathrm{C\ km^{-1}}$ (乾燥断熱減率)

$\gamma_m$： 湿潤断熱減率 : 気温に依存（下層で4～5 ℃$\mathrm{km^{-1}}$)

$\gamma_d < \gamma$： 絶対不安定

$\gamma_m < \gamma < \gamma_d$： 条件付不安定

$\gamma < \gamma_m$： 絶対安定

# Manabe の対流調節式

$\delta T,\ \delta q$ は気温、比湿の調節量

| 未飽和 $(q < q_s)$ | | 飽和 $(q \geq q_s)$ | |
|---|---|---|---|
| $\gamma \leq \gamma_d$ | 対流なし<br>$\Rightarrow \delta T = 0, \delta q = 0$ | $\gamma \leq \gamma_m$ | 大規模凝結<br>$C_p \delta T + L \delta q = 0$<br>$q + \delta q = q_s(T + \delta T, p)$<br>$\Rightarrow \delta T,\ \delta q$ |
| $\gamma > \gamma_d$ | $\frac{d}{dz}(s + \delta s) = 0$ （中立化）<br>$\int_{p_1}^{p_2} C_p \delta T dp = 0$<br>$\Rightarrow \delta T$ | $\gamma > \gamma_m$ | $\frac{d}{dz}(h + \delta h) = 0$ （中立化）<br>$q + \delta q = q_s(T + \delta T, p)$<br>$\int_{p_1}^{p_2} (C_p \delta T + L \delta q) dp = 0$<br>$\Rightarrow \delta T,\ \delta q$ |

上の表では相対湿度RH=100%で調節する→急激な調節
(”hard” convective adjustment)により降水が増えすぎる。

平均的にはRH<100% でも積雲は存在する。
→RH<100%でも調節する(“soft” convective adjustment)。

# 対流調節の問題点

対流自体の物理過程の取り扱いを回避している

＝＞$RH_c$ や$\gamma_c$ の選択、対流調節に要する時間などの

物理的根拠が曖昧。

# b. Kuo スキーム

Kuo(1965, 1974, JAS)

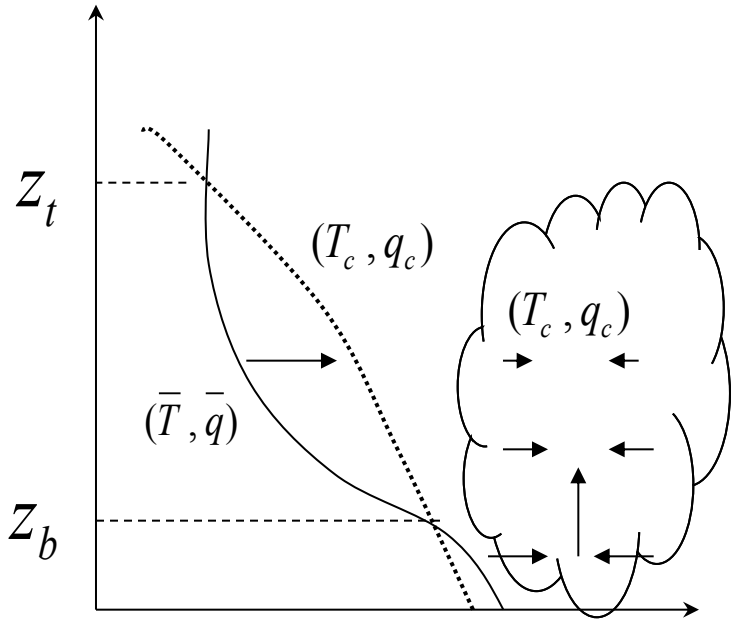
仮定：積雲対流は大気境界層に根をもつ

- 加熱, 加湿率は大気下層の水平質量収束に伴う水蒸気収束量に依存 （c.f CISK： Charney and Eliassen 1964)。
- 加熱、加湿の鉛直分布はある配分率に従う。

水蒸気収束は

$$\Delta M = -\int_0^{z_t} \nabla \cdot (q\mathbf{V}) dz = \left\langle \left( \frac{dq}{dt} \right)_{adv} \right\rangle$$

＜＞：鉛直積分



仮定1： $\Delta M$ のうち、$b\Delta M$ が雲底と雲頂の間を加湿、
$(1-b)\Delta M$ が凝結して大気を加熱する。

仮定2：加熱量、加湿量はそれぞれ雲中の気温、比湿 $(T_c, q_c)$
と外部の気温、比湿 $(\bar{T}, \bar{q})$ の差に比例する。

$$\text{加熱} = \int_{z_b}^{z_t} C_p \Delta T dz \qquad \text{加湿} = \int_{z_b}^{z_t} \Delta q dz$$

$$\int_{z_b}^{z_t} \alpha_T C_p (T_c - \bar{T}) dz \qquad = \int_{z_b}^{z_t} \alpha_q (q_c - \bar{q}) dz$$

$$= \alpha_T C_p < T_c - \bar{T} > \qquad = \alpha_q < q_c - \bar{q} >$$

$$b\Delta M = \alpha_q < q_c - \bar{q} >, \quad (1-b)\Delta M = \alpha_T \frac{C_p}{L} \left\langle T_c - \bar{T} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \alpha_q = b \frac{1}{\left\langle q_c - \bar{q} \right\rangle} \left\langle \left( \frac{dq}{dt} \right)_{adv} \right\rangle, \quad \alpha_T = (1-b) \frac{L/C_p}{\left\langle T_c - \bar{T} \right\rangle} \left\langle \left( \frac{dq}{dt} \right)_{adv} \right\rangle$$

問題点： $T_c$, $q_c$, $b$の決め方には任意性がある。
($T_c$, $q_c$: 湿潤断熱線に沿うように選ぶ, など)
雲底付近で加熱が小さくなる傾向。など

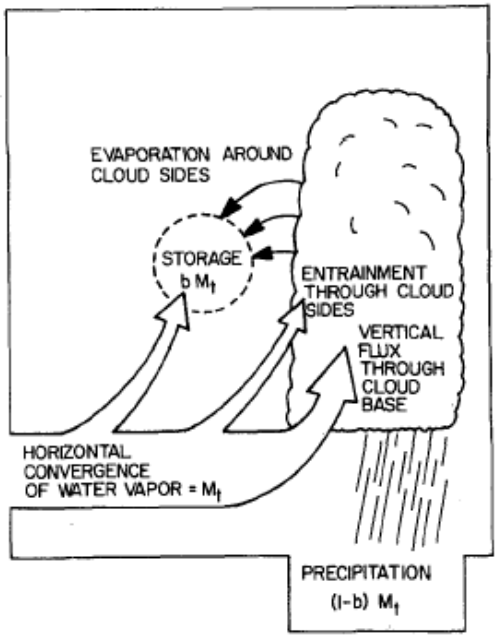



FIG. 2. Schematic diagram showing moisture cycle in a column which contains convection.

Anthes (1977, MWR)

# c. Arakawa-Schubert スキーム

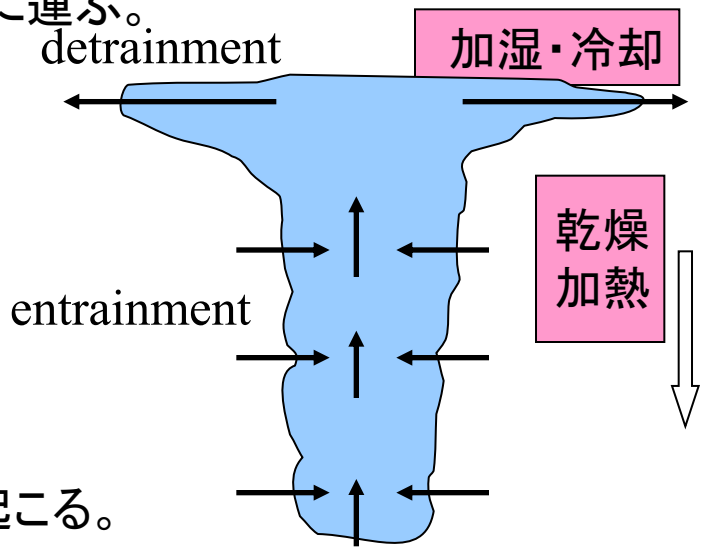
Arakawa and Schubert (1974, JAS)

物理的な根拠がより明確で現実的。以下の状況を想定。

1. ある高さの積雲中の上昇流 (密度をかけるとmass flux) は周囲の乾いた空気を取り込みつつ(entrainment)、過飽和した水蒸気を凝結させ、その凝結熱により浮力を得て、熱や水蒸気を上層に運ぶ。

2. 浮力が0になったところが雲頂で、下から運ばれた水蒸気や雲水が放出され(detrainment) 雲水は蒸発するので、そこで加湿、冷却が起こる。

3. 雲の外では積雲内の上昇流を補う下降流(補償下降流) ができ、これにより断熱的昇温が起こる。




積雲が格子スケールの気温、水蒸気量に与える影響は上の2, 3番目の過程で与えられる。

# 積雲のmass fluxのパラメータ化

## 仮定:

様々なエントレインメント率(λ)を持つ積雲の複合効果により「準平衡」が保たれるというのが，積雲群が大規模場に及ぼす作用の実体である。

デトレインメント:雲頂=LNB(Level of Neutral Buoyancy) のみで起こるとする

→ モデル各層にデトレインメントレベルを持たせることでλを離散化: $\lambda_i$, $i$=1,2,..

$$M(z,\lambda) = M_b(\lambda)\eta(\lambda,z)$$

$$\eta(z_b,\lambda) = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\eta(\lambda,z) = \lambda\eta(\lambda,z)$$

$$\Rightarrow M(z,\lambda) = M_b(\lambda)e^{\lambda(z-z_b)}$$

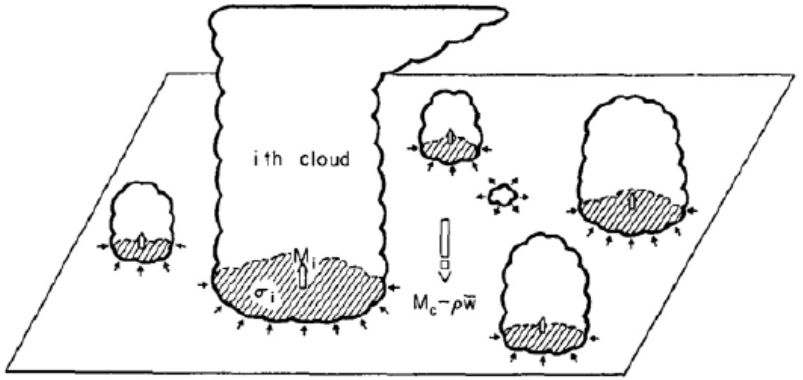



FIG. 1. A unit horizontal area at some level between cloud base and the highest cloud top. The taller clouds are shown penetrating this level and entraining environmental air. A cloud which has lost buoyancy is shown detraining cloud air into the environment.

Cloud work function $A$ : 各$\lambda_i$の雲により生成されうる運動エネルギーを導入

$$A_i = \int_{z_b}^{z_{D_i}} e^{\lambda_i (z - z_b)} B_i dz,$$

$B_i$ : buoyancy of a cloud that detrains at $z_{D_i}$

注）$\lambda$=0 の場合、$A$はsubcloud-layerのCAPEになる。

Closure assumption : **準平衡(quasi-equilibrium)**

大規模場の変化 (熱、水蒸気の移流や、放射による上層冷却、下層加熱など）による $A$ の変化を相殺するような mass flux を持つ積雲群が形成する.

$$\frac{dA_i}{dt} = \left(\frac{dA_i}{dt}\right)_{LS} + \left(\frac{dA_i}{dt}\right)_{C} \approx 0, \quad \Rightarrow \left(\frac{dA_i}{dt}\right)_{C} \approx -\left(\frac{dA_i}{dt}\right)_{LS},$$

添字“$LS$”, “$C$”はそれぞれlarge-scale, convective-scaleを指す。

$\left(\frac{dA_i}{dt}\right)_{LS}$ は（大規模場のデータから）計算可能、一方 $\left(\frac{dA_i}{dt}\right)_{C}$

はmass-fluxを用いて表現できるので、mass-fluxを求められる（実際は複雑）

- $A$ の変動が小さいことを示す観測例
（Arakawa and Schubert, 1974, JAS).

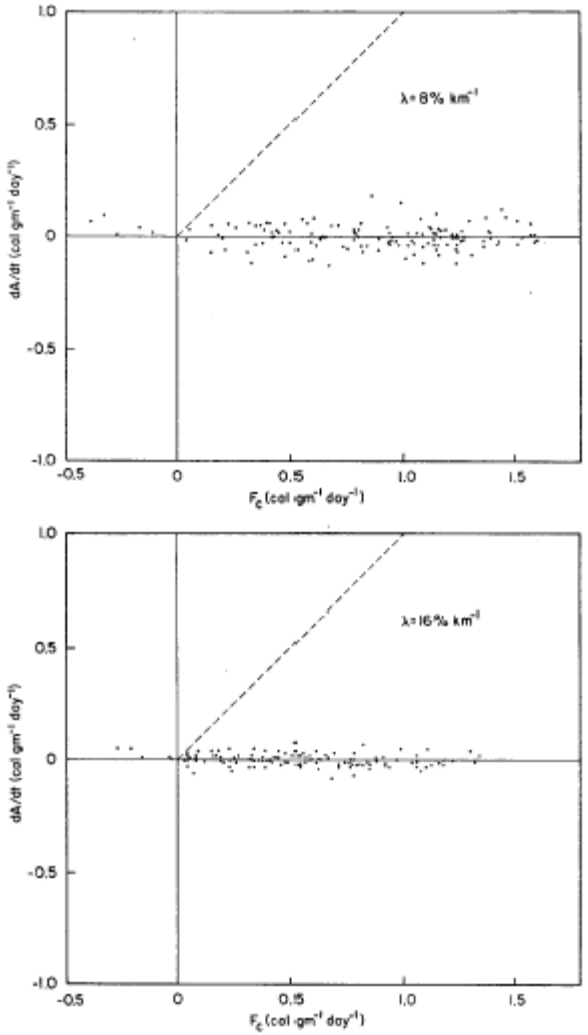



FIG. 13. An observational verification of the quasi-equilibrium assumption for cloud types $\lambda = 8\%\ km^{-1}$ and $\lambda = 16\%\ km^{-1}$, with the Marshall Islands data provided by Yanai *et al.* (1973). The abscissa is the cloud layer forcing $F_c(\lambda)$ and the ordinate is the observed time derivative of the cloud work function, $dA(\lambda)/dt$. The top of the mixed layer and cloud base are both assumed to be at 950 mb. Zero buoyancy at cloud base is also assumed. The dashed line is the line along which $dA(\lambda)/dt = F_c(\lambda)$.

横軸: 大規模場の強制　Fc
縦軸: dA/dt
点線: dA/dt=Fc

# 降水

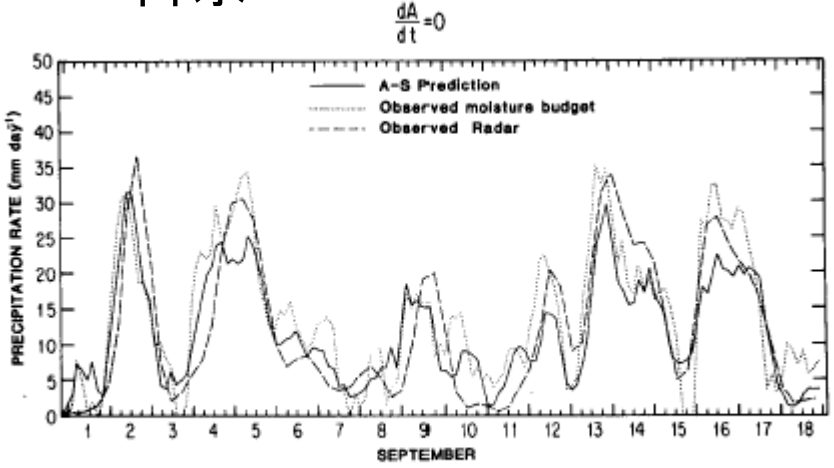



FIG. 6. A time series of precipitation rates (mm day$^{-1}$) from 1–18 September estimated by case $Q$, the observed moisture budget and radar.

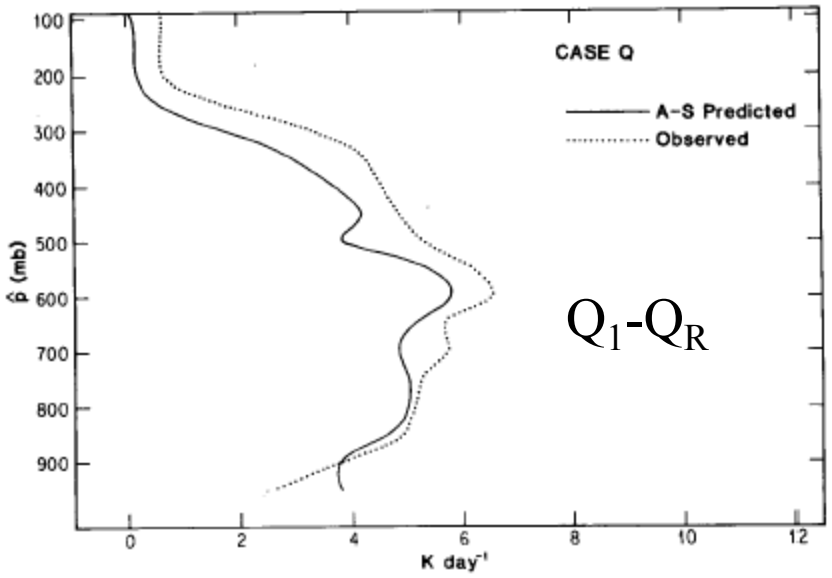



FIG. 9. The time-averaged calculated and observed $Q_1$–$Q_R$ for case $Q$.

Lord (1982, JAS)
ASスキームのテスト

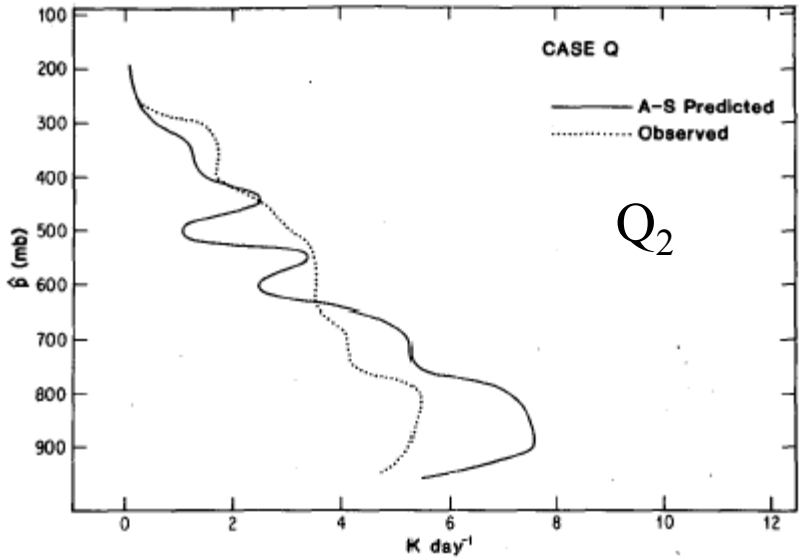
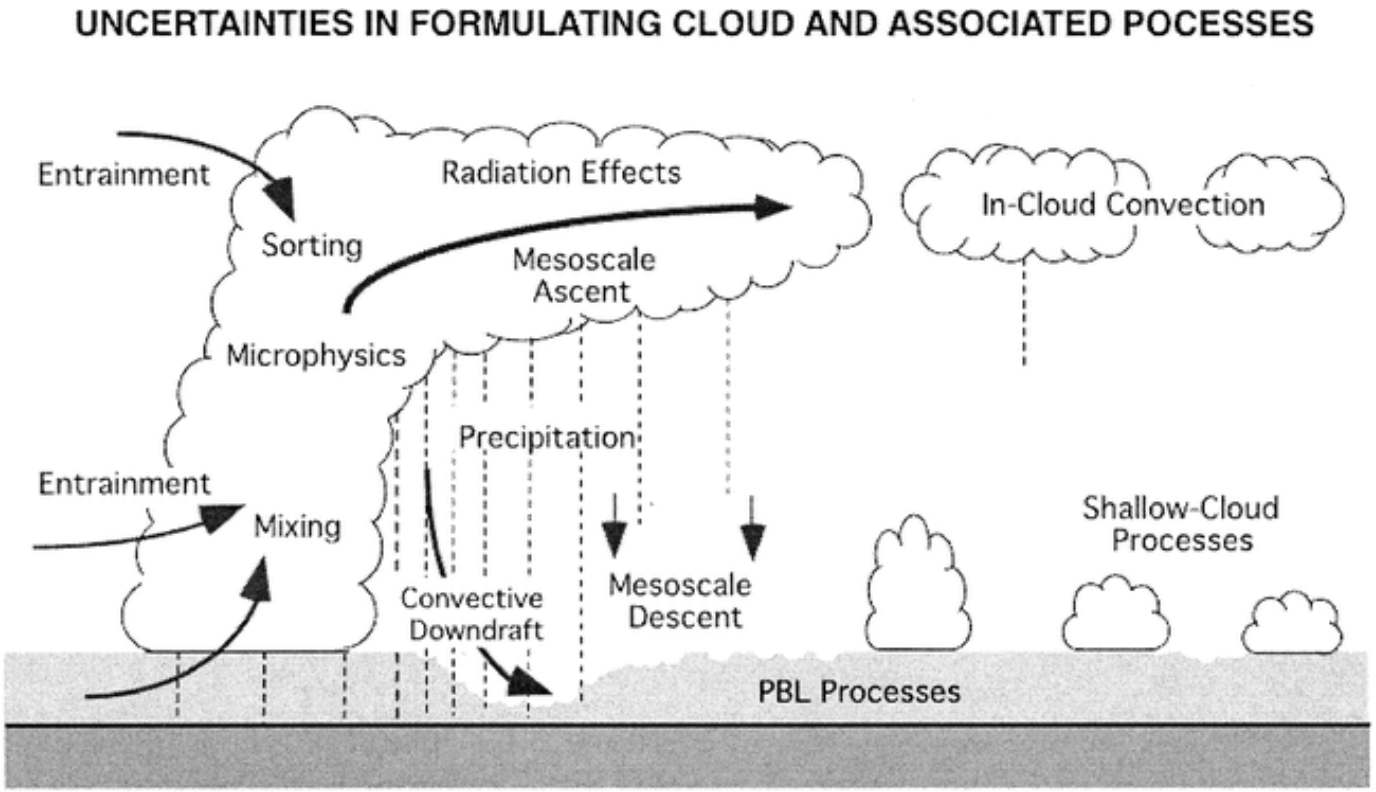



FIG. 10. The time-averaged calculated and observed $Q_2$ for case $Q$.




Arakawa-Schubert スキームの問題点　　Arakawa (2004, J.Climate)

Convective downdraft、PBLより上で発生する雲、
を考慮していない、など。

# 参考文献

浅井 (1983) ： 大気対流の科学（気象学のプロムナード１４）、
東京堂出版

時岡、山岬、佐藤（1993) ：気象の数値シミュレーション
（気象の教室５）、東京大学出版会

Emanuel, K. A. 1994 : Atmospheric convection, Oxford University press.

Arakawa, A. and J. –M. Chen, 1986 : Closure assumptions in the cumulus parameterization problem. Special volume of JMSJ, 107-132.

Arakawa, A, 2004 : The cumulus parameterization problem: Past, present, and future. J. Climate, 2493-2525.

# 重力波抵抗

## 背景

GCMの高分解能化

→移流の数値表現の精度向上

→モデル中で起こる傾圧不安定が活発化

南半球では気圧分布、偏西風などの再現性が向上したが、北半球では西風ジェットが北上偏、強くなりすぎ、再現性がかえって悪くなった。

→サブグリッドスケールの地形による内部重力波の効果を考慮すると問題解消。(Palmer et al. 1986, QJRMS)

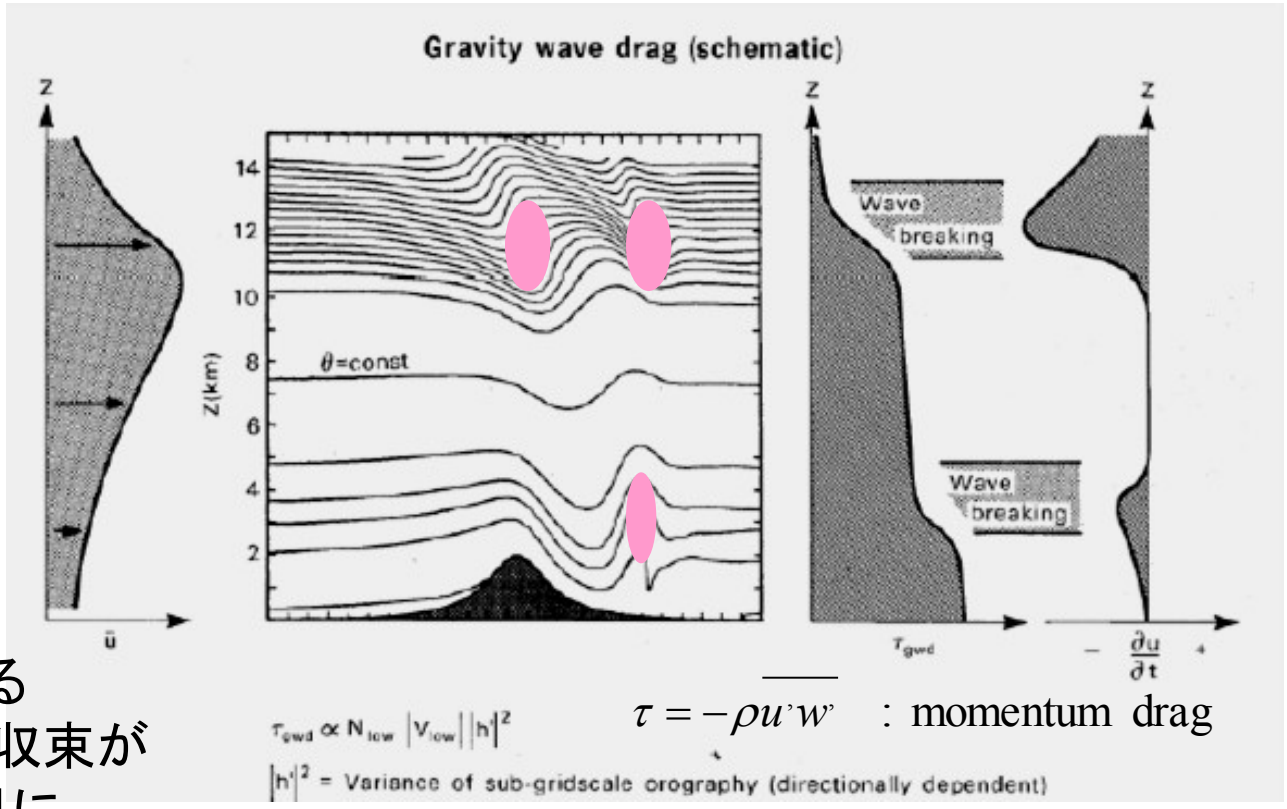
大気重力波は運動量,エネルギーを輸送

水平一様を仮定した
運動方程式

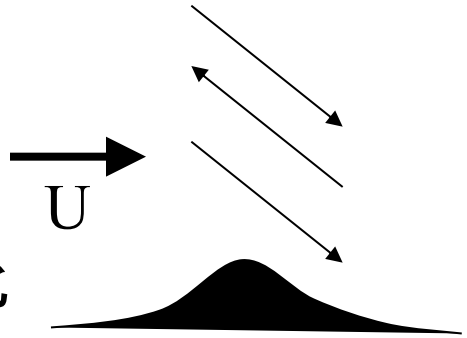
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \overline{u'w'}}{\partial z}$$

=運動量フラックス
収束

ある高度で波がつぶれる
($\overline{u'w'} \to 0$)と、フラックス収束が
起こり、運動量が平均風に
渡される。




西風の場合、山岳の抵抗により
西向き(東風)運動量が上に運ばれる。
運動量輸送がzに無関係なら加　・減速しない。
(非加速定理)




:運動量フラックスをパラメータ化

運動量フラックス

$\overline{u'w'} < 0$

momentum drag

$\tau = -\bar{\rho} \overline{u'w'} > 0$

## 波がつぶれる原因

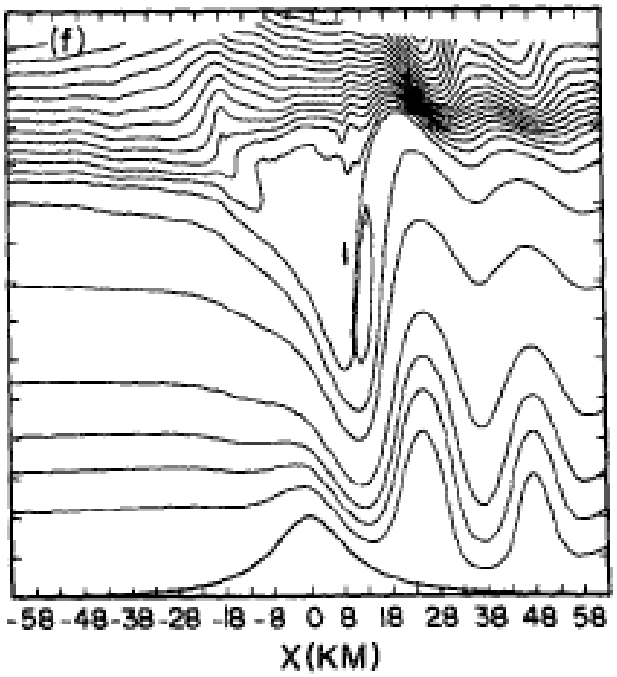
(i)非線形効果による砕波

上空での密度減少
→振幅の増大
→成層の不安定化
→乱流化

＊山岳が急な場合、非線形効果により低高度でも砕波が起こる（おろし風）。

## 重力波(2次元)のエネルギー

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 \left[ u'^2 + w'^2 + \left( \frac{g\theta'}{\theta_0 N} \right)^2 \right]$$




Peltier and Clark (1979, JAS)

# 波がつぶれる原因

## (ii) 臨界層（critical level）の存在

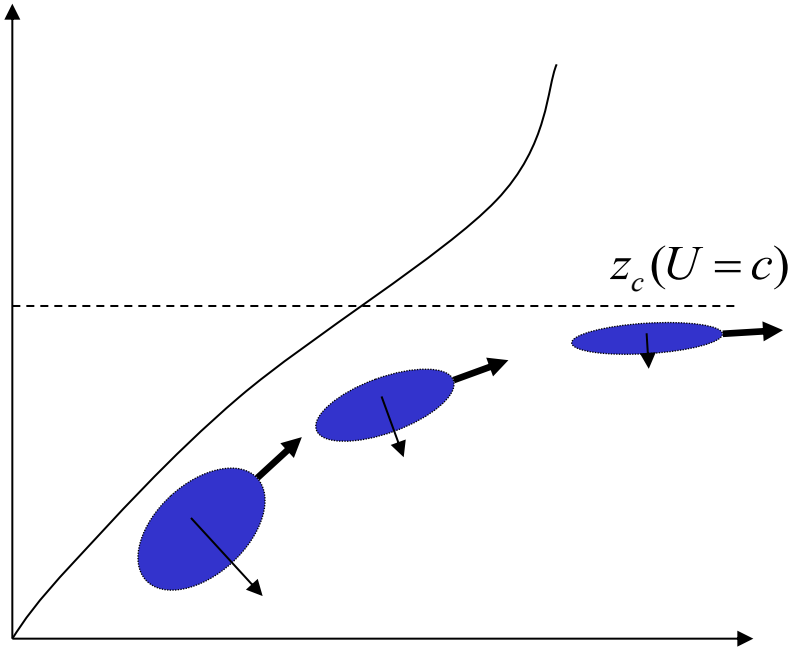
$$m^2 = \frac{N^2}{(\bar{u}-c)^2} - k^2$$

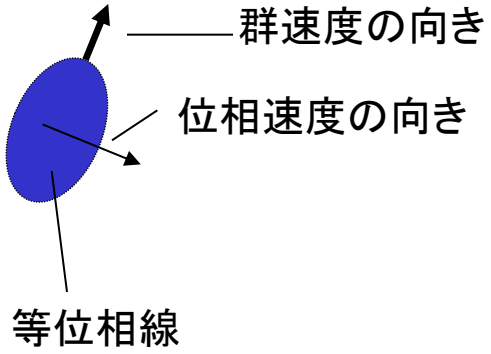
$m$ : (局所的) 鉛直波数

$k$ : 水平波数

$$\bar{u} \to c \quad \Rightarrow \; m \to \infty$$

Critical level付近では
鉛直波数が大きくなり、
粘性により波は減衰し
やすくなる。



山岳の標高を

$h(x) = h_m \sin kx$

とすると、地上でのmomentum drag $\tau_S$ は

$$\tau_s = -\frac{1}{2} k \rho_s N_S h_m^2$$

と書ける(補遺参考, $s$は地上での値を表す)

$\delta h$ を任意の高度での鉛直方向への変位とすれば、山岳波に伴う任意の高度でのdragは

$$\tau = -\rho \overline{u'w'} = -\frac{1}{2} k \rho U N \delta h^2$$

途中で砕波が起きなければ

$\tau = \tau_s$

$\rightarrow \delta h$が計算できる

$\rightarrow \delta h$を用いて$R_i$ を計算

$$\Rightarrow Ri_{\min} = Ri \frac{1-(N\delta h/U)}{[1+Ri^{1/2}(N\delta h/U)]^2}$$

if $Ri_{\min} \le 0.25$

=> KH-不安定が起こり、
運動量が平均流に渡されるべき。

$R_i < 0.25$ の場合、$R_i > 0.25$ となるよう$\delta h$を調節

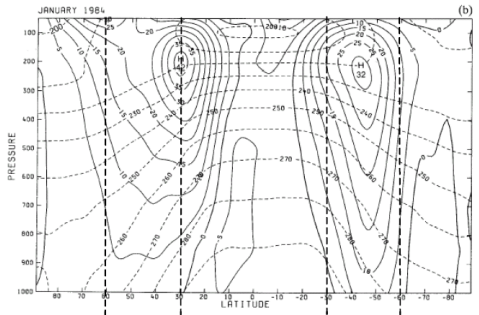
$\rightarrow$改めて求めた $\tau$ を用いて、加速量を以下で計算

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z}$$

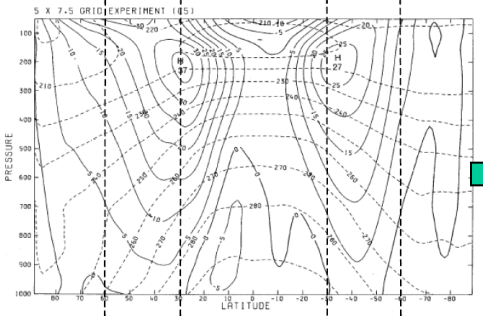
帯状平均西風（1月）

# GCM実験

観測

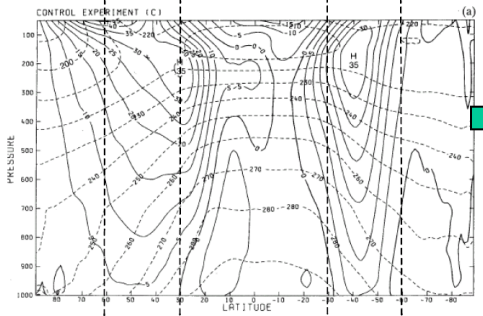



5° ×7.5° モデル
No GWD



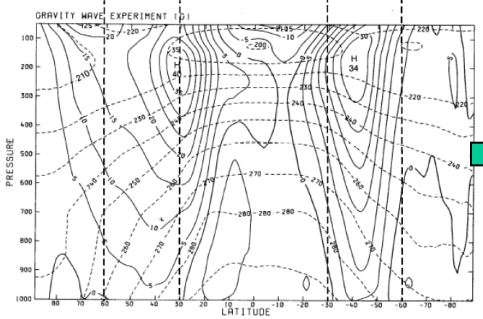

南半球は風速過小評価
→（解像度が粗く）Bが過小評価されるため。
北半球は悪くない。
→Bは過小評価されるが、Gの効果を考慮してないので良いだけ。

2.5° ×3.75° モデル
No GWD




南半球は良くなる。
→Bの再現性良くなったため。
北半球は風速過大評価
→Bの再現性は良くなると考えられるが、Gの効果が入ってないため。

2.5° ×3.75° モデル
GWD




Bの再現性がよくなり、Gの効果も入っているので、良い結果

(Palmer et al., 1986)

U=B－G
B:傾圧不安定波による加速効果
（ $\approx -\partial(\overline{u'v'})/\partial y$ ）
G: 重力波抵抗による減速効果
北半球: G大
南半球: G小

Palmer et al. (1986, QJRMS)

# 課題

- 下部対流圏での砕波（Iwasaki et al. 1989, JMSJ)
- 山岳の形状、風向きへの依存（Kim and Arakawa 1995, JAS)
- 山岳以外の非定常、移動性source (積雲対流など）
  の表現

# （補遺）運動量フラックスの導出　(参考文献：メソ気象の基礎理論)

2次元(x,z),非回転、断熱、非粘性Boussinesq
流体を考えると

$$(u,v,w)=(U+u',0,w') \quad \theta=\theta_0+\theta'$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t}+U\frac{\partial w'}{\partial x}-g\frac{\theta'}{\theta_0}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t}+U\frac{\partial \theta'}{\partial x}+\frac{N^2\theta_0}{g}w'=0$$

$\frac{\partial A}{\partial t}\to 0$（定常）を仮定すると

$$\nabla^2 w'+l^2(z)w'=0$$

where

$$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$$

$$l^2(z)=\frac{N^2}{U^2}-\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dz^2} \quad \text{(Scorer parameter)}$$

または

$w'=\hat{w}(z)\exp[ik(x-ct)]$

の形の解を考えると、

振幅$\hat{w}$を決める式は

$$\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2}+(l^2-k^2)\hat{w}=0$$

where

$$l^2=\frac{N^2}{(U-c)^2}-\frac{1}{U-c}\frac{d^2U}{dz^2} \quad \text{(Scorer parameter)}$$

**山岳の標高**

$$h(x) = h_m \sin kx$$

$$\frac{w_s}{u_s} = \frac{w_s'}{U_s + u_s'} = \frac{dh_m}{dx} \quad \text{at } z = h_m(x)$$

$h_m(x)$の傾斜が小さいと仮定すると、

$$w_s' = U_s \frac{dh_m}{dx} \quad \text{at } z = 0$$

$$\rightarrow w_s'(x,0) = U_s h_m k \cos kx \qquad \text{（下部境界条件}$$

$$\rightarrow u_s'(x,0) = -U_s h_m m \cos kx$$

**地上での** momentum drag $\tau_s$ **は**

$$\tau_s = -\rho_s \overline{u_s' w_s'}$$

$$= -\rho_s \int_0^{2\pi/k} u_s' w_s' dx$$

$$= -\rho_s U_s{}^2 h_m^2 km \int_0^{2\pi/k} \cos^2 kx dx$$

$$= -\frac{1}{2} \rho_s U_s{}^2 h_m^2 km$$

$$= -\frac{1}{2} k \rho_s U_s N_s h_m{}^2$$

波型を仮定

$k$：水平波数

$m$：鉛直波数

定常 $\rightarrow$ 内部重力波の水平位相速度について

$c = N/m = U$

とならなければならないから

$m = N/U$